Varianta 94

Subiectul I.

a) $\left|\frac{3+2i}{2+3i}\right| = 1$.

b) $\frac{10\sqrt{14}}{7}$.

c) $A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ şi $B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Funcția cosinus este strict descrescătoare pe $(0, \pi)$, așadar $\cos 1 > \cos 2$.

e) $S_{ABC} = 6$.

f) $a = -1$ şi $b = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{4}$.

c) Există 8 mulțimi cu X cu proprietatea cerută.

d) $x = 1$.

e) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2$.

2.

a) $f'(x) = \frac{3x^2+2}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx = 3 - \frac{\pi}{4}$

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{5}{2}$.

e) $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \ln 2$.

Subiectul III.

a) $P + Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(P+Q)^2 = I_2$.

b) $\det(P)=0$, $\operatorname{rang}(P)=1$.
c) Se arată prin calcul direct.
d) Considerăm $x, y, a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât $x+y=2(a+b)$,

Presupunem că avem $\begin{cases} x<a+b \\ y<a+b \end{cases}$.

Adunând inegalitățile obținem $x+y<2(a+b)$, fals.
e) Punând în afirmația de la **c)** $x=\det(A+B)$, $y=\det(A-B)$, $a=\det(A)$ și $b=\det(B)$ și folosind **d)**, obținem concluzia.
f) Se folosește principiul întâi de inducție și punctul **e)**.

g) Alegem matricele $A_k=\begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$, unde $k \in \{1, 2, ..., 2007\}$.

Avem $\det(A_k)=1$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., 2007\}$.
Din **f)** rezultă că există cel puțin o alegere a semnelor pentru care avem:
$\det(A_1 \pm A_2 \pm ... \pm A_{2007}) \geq \det(A_1)+\det(A_2)+...+\det(A_{2007})=2007$.
Mai mult, $\alpha=\det(A_1 \pm A_2 \pm ... \pm A_{2007}) \geq 2007$.

Subiectul IV.
a) $f_n(0)=g_n(0)=0$.
b) Evident.
c) Se arată prin calcul direct.
d) Din **c)** rezultă că f_n este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$ și g_n este strict crescătoare pe $[0,\infty)$. Așadar, $\forall\, x>0$, $f_n(x)<f_n(0)\overset{a)}{=}0=g_n(0)<g_n(x)$.

e) Se arată prin calcul direct că $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și $x \in [-1,1]$, avem: $-1 \leq x^n \leq 1$, deci $\frac{-1}{n} \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Trecând la limită în inegalitatea precedentă, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}=0$.

g) Din **d)** deducem: $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $-\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \leq f_n(x) \leq 0$ și trecând la limită, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\forall\, x \in [0,1]$.
Ținând cont de imparitatea funcției f_n, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\forall\, x \in [-1,1]$.

Atunci, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}\right)=\operatorname{arctg} x$, $\forall\, x \in [-1,1]$.

h) Ca la **g)**, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

Înlocuind n cu $n+1$ şi integrând apoi relația din ipoteză pe intervalul $[0,1]$, obținem concluzia.